به نام زندگی

اطلاعات متقابل $I(X;Y)$

$$I(X;Y) = E\left\{ \log \frac{P(x,y)}{P(x)\,p(y)} \right\} = I(Y;X)$$

با توجه به تعریف

اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از هم باشند داریم

$$P(x,y) = P(x)\,P(y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow I(X;Y) = I(Y;X) = 0$$

$I(X;Y) = I(Y;X) \geq 0$ به راحتی می توان نشان داد که همواره

رابطه ی بین اطلاعات متقابل و آنتروپی

می دانیم

$$I(X;Y) = E_{p(x,y)}\left\{ \log \frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)} \right\}$$

$$= E_{p(x,y)}\left\{ \log \frac{\cancel{p(x)}\,p(y|x)}{\cancel{p(x)}\,p(y)} \right\}$$

رابطه زنجیره ای

$$p(x,y) = \overbrace{p(x)\,p(y|x)}^{1} = \overbrace{p(y)\,p(x|y)}^{2}$$

$$\Rightarrow I(X;Y) = E_{p(x,y)}\left\{\log \frac{p(y|x)}{p(y)}\right\}$$

$$= E_{p(x,y)} \log p(y|x) - E_{p(x,y)} \log p(y)$$

$$= -H(Y|X) - \sum_{y} \underbrace{\sum_{x} p(x,y)}_{p(y)} \log p(y)$$

$$= -H(Y|X) + H(Y)$$

1 $\Longrightarrow$ $$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \geq 0$$

2 $\Longrightarrow$ $$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0$$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$

$\Longrightarrow$ $$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \geq 0$$

$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$

$I(X;Y) = I(Y;X)$, $I(X;Y) \geq 0$

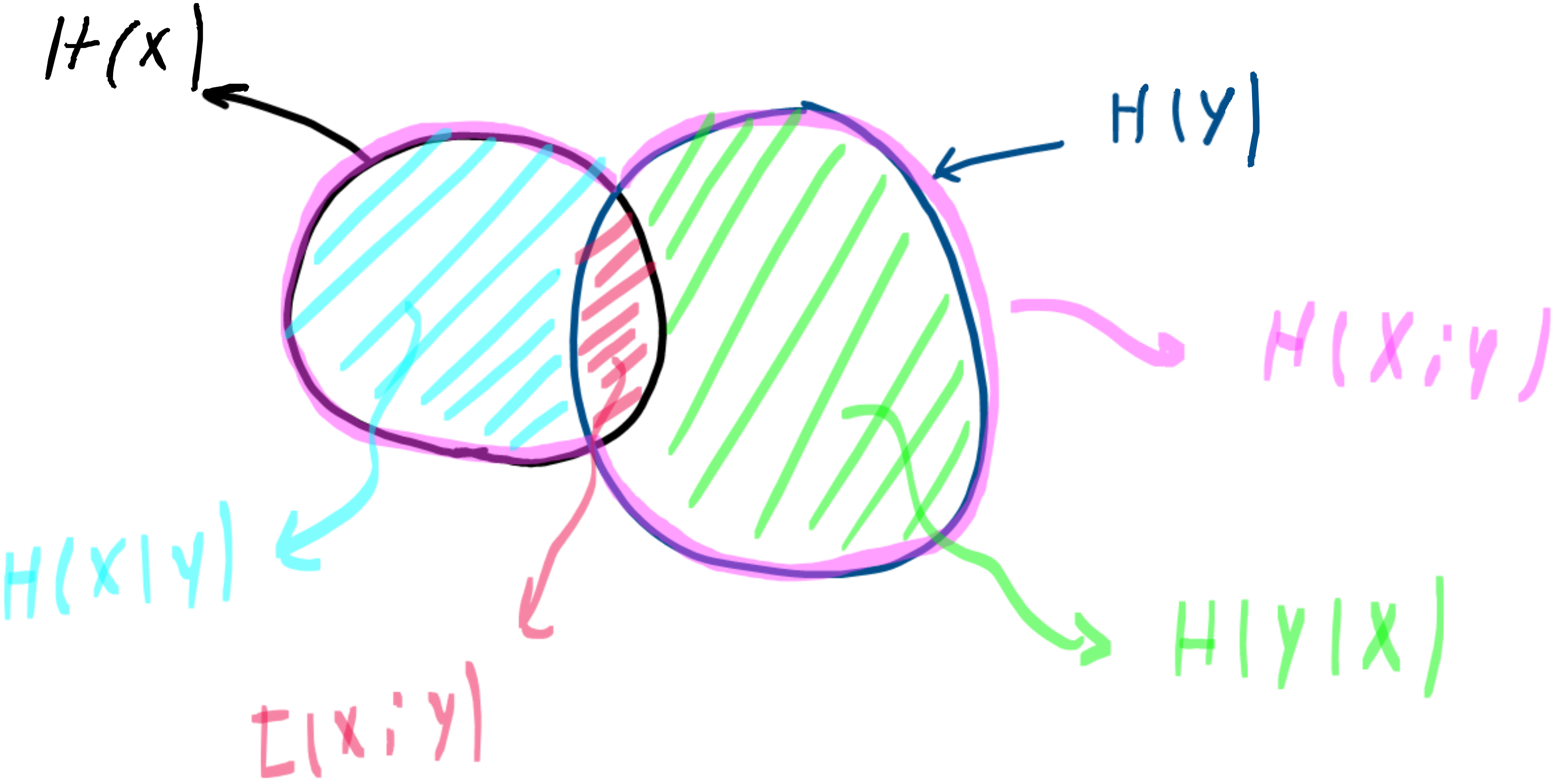
$$①,② \Longrightarrow \begin{cases} H(X|Y) \leq H(X) \\ H(Y|X) \leq H(Y) \end{cases}$$

* مشروط کردن از ابهام کم می کند.

,

$$H(X) + H(Y) \geq H(X,Y)$$

به عنوان جمع بندی مطالب گفته شده، می توانیم روابط به دست آمده را با استفاده از دیاگرام ون (Ven Diagram) نمایش دهیم



محدوده‌ای که بشود اطلاعات به جایی رسید

دو مسئله‌ای که دوگان یکدیگر هستند

مسئله فشرده سازی

$$\min_{P(x|\hat{x})} I(X;\hat{X}) \rightarrow R(D)$$

subject to $E\,d(x,\hat{x}) \le D$

X : خروجی منبع اطلاعات

$\hat{X}$: بازسازی اطلاعات منبع

مسئله ظرفیت کانال

$$\max_{P(x)} I(X;Y) \rightarrow C$$

X : ورودی کانال

Y : خروجی کانال

در ادامه می خواهیم مسأله فشرده سازی را بررسی کنیم.

$$R(D) = \min_{p(x|\hat{x})} I(X;\hat{X})$$

$$\text{subject to} \quad E\,d(x,\hat{x}) \leq D$$

در مسأله فشرده سازی، هدف این است که بیان از اطلاعات منبع را به است بیاوریم که کمترین میزان اضافات را داشته باشد. به این ترتیب می پردازیم در

پهنای باند لازم برای انتقال اطلاعات، صرفه‌جویی کنیم. یا به عبارت دیگر از پهنای باند به بهترین شکل استفاده کنیم. در این مسأله یک حد اعوجاج D در نظر گرفته می‌شود که با داشتن این مقدار اعوجاج، بازای اطلاعات با خطای به میزان دلخواه کم امکان‌پذیر است. به این ترتیب به یک تابع (R(D Rate Distortion می‌رسیم که نشان دهنده کمترین اعوجاج از کمترین نرخ ممکن است.

مسئله کلی فشرده سازی اطلاعات (Compression) را می توانیم

به دو دسته کلی فشرده سازی Lossy و فشرده سازی Lossless

دسته بندی کنیم. در مسئله فشرده سازی Lossy یک حد اعوجاج D

قابل قبول است به طوری که با وجود این میزان اعوجاج، می توان اطلاعات

را با خطای به میزان دلخواه کم بازیابی کرد.

از روشهای Lossless که به آنها روشهای کدینگ منبع (source coding)

می گوییم ، اعوجاج قابل تحمل نیست یعنی در این حالت داریم $D = 0$

و در نتیجه مسأله فشرده سازی به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\min_{P(x|\hat{x})} I(X;\hat{X}) \equiv H(X)$$

subject to $D=0$

می‌توان نشان داد که این حد برابر آنتروپی منبع است.

با بیان دیگر حد فشرده‌سازی اطلاعات در روشهای lossless برابر آنتروپی منبع است یا به طور معادل کمترین میانگین طول کلمات کد برای بیان اطلاعات منبع برابر آنتروپی است یا کمترین میانگین تعداد بیت‌های لازم برای بیان اطلاعات منبع برابر آنتروپی منبع است.

به طور کلی در مسأله فشرده سازی lossless به دنبال یک بیان
(representation) از منبع هستیم یا می‌خواهیم به هر یک از الفبای
خروجی منبع یک کلمه کد نسبت دهیم ، به طوری که بازیابی اطلاعات
در گیرنده با خطای به میزان دلخواه کم امکان پذیر باشد و به حد فشرده سازی
$H(X)$ برسیم . باید توجه داشته باشیم که این عملیات باید برگشت پذیر باشد و
در گیرنده برای بازیابی اطلاعات ، ابهامی نداشته باشیم.

به عنوان یک مثال از روشهای کدینگ منبع می‌توان به روش کدینگ مورس اشاره کرد که در آن به هر یک از حروف و علامت‌های الفبای انگلیسی یک کد نسبت داده می‌شود و به جای ارسال الفبای منبع، کلمات کد مربوط به هر الفبا، ارسال می‌شود.

بنابراین در مسأله کدینگ منبع هدف این است که به هر یک از الفبای خروجی منبع یک کلمه کد نسبت بدهیم، به طوری که تا حد ممکن به حد فشرده‌سازی $H(X)$

نزدیک باشیم و بازیابی اطلاعات در گیرنده با خطای به میزان دلخواه کم امکان پذیر باشد. (در انجام این کدینگ باید توجه داشته باشیم که عملیات کدینگ باید برگشت پذیر باشد و در گیرنده ابهامی در بازیابی اطلاعات رخ نداشته باشیم)

توجه به این نکته لازم است که همواره در بازیابی اطلاعات، مقداری خطا وجود دارد که به آن خطای بازیابی اطلاعات می‌گوییم و با روش‌های کدینگ مناسب، این خطا را تا حد امکان کم می‌کنیم. اما ابهام در بازیابی اطلاعات که ناشی از

طراحی نامناسب کدینگ است ، در روشهای کدینگ باید در نظر گرفته شود.

در ادامه بررسی روشهای کدینگ منبع (روشهای فشرده سازی lossless) متمرکز می شویم و منابع اطلاعات را گسسته در نظر می گیریم.

تعریف کدینگ منبع

فرض می کنیم یک منبع اطلاعات گسسته داریم که خروجی آن را با متغیر تصادفی X

نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی x مقادیری از مجموعه $\mathcal{X}$ را اختیار می‌کند.

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$X = x \quad , \quad x \in \mathcal{X}$$

کد منبع C یک نگاشت از مجموعه $\mathcal{X}$ به یک مجموعه M^* است.
که در آن M^* یک مجموعه از سمبل‌ها با طول محدود است. هر یک از المان‌های

این سمبل از مجموعه M انتخاب می شوند. در یک کد منبع M-ary

داریم $M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$

به هرکدام از الفبای منبع x_i یک کلمه ی کد $c(x_i)$ اختصاص داده

می شود، طول کلمه کد مربوط به الفبای x_i را نیز با نمایش $l(x_i)$

می دهیم.

می‌توان نشان داد که میانگین طول کلمات کد منبع همواره بزرگتر یا مساوی

آنتروپی منبع است.

$$E\{l(x)\} = L(X) \geq H(X)$$

$$= \sum_{x_i} p(x_i)\, l(x_i)$$

به عنوان مثال: فرض کنیم منبع اطلاعات به صورت

$$X = \{\overset{x_1}{Red}, \overset{x_2}{Green}, \overset{x_3}{Blue}\} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

است و می‌خواهیم یک کد منبع باینری برای این منبع در نظر بگیریم. این کد

می توانند به صورت زیر باشد.

کدباینری $\leftarrow M=2 \leftarrow M=\{0,1\}$

$C(Red) = C(x_1) = 00 \longrightarrow l(x_1) = 2$

$C(Green) = C(x_2) = 01 \longrightarrow l(x_2) = 2$

$C(Blue) = C(x_3) = 11 \longrightarrow l(x_3) = 2$

با فرض هم احتمال بودن خروجی های منبع داریم

$$L(X) = E\{l(x)\} = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 = 2$$

$$M^* = \{00, 01, 11\}$$

* براساس یکی از قضیه های اساسی تئوری اطلاعات داریم

$$E\{l(x)\} = L(X) \geq H(X)$$

در ادامه می‌خواهیم به حل مسأله کدینگ منبع بپردازیم. می‌دانیم که در مسأله کدینگ منبع (فشرده‌سازی lossless ها) هدف این است که به هر حرف از الفبای خروجی منبع یک کلمه کد نسبت دهیم، به طوری که میانگین طول کلمات کد تا حد امکان به H(X) نزدیک باشد. زیرا به این ترتیب به حد فشرده‌سازی نزدیک هستیم و به بهترین شکل از پهنای باند استفاده می‌کنیم. روش‌های کدینگ منبع به صورتی طراحی می‌شوند که خطای بازیابی اطلاعات به میزان دلخواه کم باشد و علاوه بر این، بازیابی اطلاعات در گیرنده بدون ابهام انجام شود.

برای اینکه مسئله را بهتر درک کنیم از یک مثال استفاده می کنیم و نکات لازم را مطرح کرده منبع را بیان می کنیم و سپس به بیان چارچوب ریاضی کد بندی منبع می پردازیم.

مثال: یک منبع گسسته را در نظر می گیریم که الفبای خروجی آن به صورت

$$X = \{a, b, c, d\}$$

با احتمالات $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$ است.

می‌خواهیم برای این منبع، یک کد منبع مناسب با توجه به نکات گفته شده، طراحی کنیم. (کدبانزی)

$M = \{0, 1\}$

* طرح اول: یک روش ساده برای کد کردن خروجی این منبع به صورت زیر است.

$$X = \{a, b, c, d\} \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$c(a) = c(x_1) = 00 \rightarrow \ell(x_1) = 2$$

$$c(b) = c(x_2) = 01 \rightarrow \ell(x_2) = 2$$

$$c(c) = c(x_3) = 10 \rightarrow \ell(x_3) = 2$$

$$c(d) = c(x_4) = 11 \rightarrow \ell(x_4) = 2$$

$$L(X) = E\{l(x)\} = \sum_{i=1}^{4} p(x_i)\,\overbrace{l(x_i)}^{2}$$

$$L(X) = 2\underbrace{\sum_{i=1}^{4} p(x_i)}_{1} = 2 = L(X)$$

از طرف دیگر آنتروپی منبع

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log p(x_i) = \frac{1}{2}\underbrace{\log 2}_{1} + \frac{1}{4}\underbrace{\log 4}_{2} + 2\,\frac{1}{8}\underbrace{\log 8}_{3}$$

$$\Rightarrow H(X) = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

در نتیجه داریم

$$2 = L(X) > H(X) = \frac{7}{4}$$

همان طور که می‌بینیم به حد نهایی فشرده سازی نرسیده ایم. اما این کد یک کد
منبع ساده است که با پیچیدگی بسیار کم در سمت فرستنده و گیرنده قابل پیاده
سازی است. در مرحله کدینگ به راحتی می‌توانیم به هر یک از خروجی های منبع
که متناظر را نسبت دهیم. با توجه به اینکه پیشنهادی که با طول ثابت 2
برای تمامی الفبای منبع است، در دیکد نیز به راحتی در بدن انجام می‌توانیم عملیات

دیکدینگ را انجام دهیم. به این صورت که با دریافت رشته بیت ارسالی ، دو بیت ، دو بیت سمبل ها را جدا می کنیم، بر اساس قانون کدینگ اطلاعات دیکدینگ را نیز انجام می دهیم.

0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0

b a b d

هیچ ابهامی در بازیابی اطلاعات نداریم.